Magasabbfokú egyenletek megoldása

Szoldatics József (Kapuvár)

Első- és másodfokú egyenleteket már a babiloniak is sikerrel oldottak meg 4000 évvel ezelőtt. Az algebrai egyenletek képlettel való megoldhatóságának problémája a reneszánsz korban került előtérbe. Olasz matematikusoknak a tizenhatodik században sikerült a harmad- és negyedfokúak megoldása gyökképlettel. A modern idők tudománya először haladta jelentősen túl az antik és az arab matematikát. Nem létezett ezután egyetlen nagy matematikus sem, aki ne próbálta volna folytatni az olaszok eredményeit és hozzájuk hasonlóan algebrailag megoldani az ötöd-, hatod és magasabb fokú egyenleteket.

Ezek az erőfeszítések azonban sorra kudarcot vallottak. Az egyenletek megoldóképletének létezéséről megoszlottak a vélemények. Lagrange (1736-1813) pl. kételkedett az ötödfokú egyenlet megoldhatóságában, sejtésként kimondta, hogy az ötöd- és annál magasabb fokú egyenletek nem oldhatók meg algebrailag. Euler (1707-1783) viszont úgy vélekedett, hogy a négynél magasabb fokú egyenletek is megoldhatók megoldóképlettel. Tschirnhaus (1651-1708) azt hitte, hogy általános módszert talált az egyenletek megoldására. Az évszázadok előrehaldtával egyre több matematikus fejében fordult meg, hogy talán nem is létezik megoldóképlet.

A kérdést a 18. század végén 19. század elején sikerült teljesen tisztázni. Először, 1799-ben Ruffini (1765-1822) közölt bizonyítást arra, hogy az ötöd- és magasabb fokú egyenleteknek nincs általános megoldása. Bizonyítása azonban hiányos volt, 1826-ban, Abel (1802-1829) bizonyította a tételt. Azonban Abel cikkével az egyenletek megoldásának problematikája még nem zárult le, a teljes tisztázás Galois (1811-1832) nevéhez fűződik.

Ezzel eldőlt az a közel három évszázados küzdelem, mely az ötöd- és magasabb fokú egyenletek megoldóképletének felkutatásáért folyt. Kiderült, hogy a matematikusok olyasvalamit kerestek, ami nem létezik.

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = x-\frac{a}{3}, \quad p = b-\frac{a^3}{3}, \quad q = c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27} \quad \Leftrightarrow \quad x^3+px+q=0$$

$$x^3+px+q=0$$

1. $$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

2. $$x=-\frac{a}{3}+\sqrt[3]{-\frac{b-\frac{a^3}{3}}{2}+\sqrt{\frac{\left(b-\frac{a^3}{3}\right)^2}{4}+\frac{\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b-\frac{a^3}{3}}{2}-\sqrt{\frac{\left(b-\frac{a^3}{3}\right)^2}{4}+\frac{\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)^3}{27}}}$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

3. $$x=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{-\frac{\frac{c}{a}-\frac{b^3}{3a^3}}{2}+\sqrt{\frac{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^3}{3a^3}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}\right)^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{\frac{c}{a}-\frac{b^3}{3a^3}}{2}-\sqrt{\frac{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^3}{3a^3}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}\right)^3}{27}}}$$