Prímszámok, sűrűségük, ritkaságuk, osztók összege

Szoldatics József, Felsőbüki Nagy Pál Gimnázium, Kapuvár

Már a görögök is foglalkoztak kavicsok rendezett elhelyezésével. Különböző alakzatokat vettek fel, háromszög, négyszög, ötszög… A téglalap vizsgálatakor figyeltek fel arra, hogy vannak olyan számok (például a 13 is ilyen), amelyek csak egyféleképpen helyezkedhetnek el : 1 sor és 13 oszlop. Az ilyen számokat hívták prímszámoknak.

Érdekelte őket, hogy

- milyen sok prímszám létezik
- mennyire sűrűn helyezkednek el
- mekkora távolság lehet két prímszám között.

Prímszámok száma: Végtelen sok prímszám létezik! (bizonyítások)

Prímszámok sűrűsége és ritkasága:

Két prímszám közötti távolság: 1

2 és 3 és nincs több!

Két prímszám közötti távolság: 2

3 és 5, 5 és 7 … ikerprímek, számuk nem ismert. Sejtés: végtelen sok.

Két prímszám közötti távolság: 3

2 és 5 és nincs több!

Két prímszám közötti távolság: 4

3 és 7, 13 és 17, 19 és 23, 37 és 41

Két prímszám közötti távolság: 5

2 és 7 és nincs több!

Két prímszám közötti távolság: 6

5 és 11, 11 és 17, 17 és 23, 23 és 29 (5+6k)

…..

Le lehetne-e írni a prímeket valamilyen függvény segítségével?

5+6k k=0..4, de 5-re!

5+12k k=0..4, de 5-re!

Általában a+bk, milyen k-ra lehet (?!). Lehet-e végtelen sok-ra?

ha (a;b)>1 nem lehet, ha (a;b)=1, akkor legfeljebb a-1 db lehet egymás után.

Összetettebb képletek:

$n^2+n+41 \qquad n=0...39, \qquad (Euler, 1772)$

$n^2-79n+1601 \qquad n=0..79$

$n^2-5n+47 \qquad n=0..42$

Lehetne-e ügyesebb választással „jobb” függvényt készíteni? (bizonyítás, nem)

Nézzük azt, hogy a közöttük levő számok mind összetettek, van-e ilyen.

Klasszikus feladat: bizonyítsuk be, hogy tetszőleges nagy közök vannak a számok között.

Például van-e 17 egymást követő összetett szám?

Képezzük a következő számot:

$$A = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17 = 510510$$

Ekkor a következő számok mind összetettek:

$A+2=510512$

$A+3=510513$

.....

$A+17=510527$

$A+18=510528$

mivel minden szám összetett (szorzattá lehet alakítani).

De nincs e kisebb ilyen szám?

De van, a legelső: 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540

(1000-ig van 19 hosszú is: 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906)

Vizsgáljuk meg a kapott számokat, tényleg összetettektől van-e szó? (Táblázat, 524…)

Foglalkoztak a régi görögök természetesen még más, érdekes számokkal is. Mi itt most az osztók összegével foglalkozunk a továbbiakban.

$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$, ha $(a;b)=1$

$$\sigma(p^n)=\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

Mikor páros és mikor páratlan az értéke.

$$n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

$$\sigma(n) = \sigma\left(2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\right) =$$

$$= \left(1 + 2 + \ldots + 2^{\alpha}\right)\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}\right)\ldots\left(1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{\alpha_n}\right)$$

Ha páratlan az érték, akkor minden zárójelben is páratlan szám áll. Az elsőben ez természetesen teljesül. A másodikban páratlan számok állnak, tehát a_1 páros szám. A harmadikban páratlan számok állnak, tehát a_2 páros szám. És így a további zárójelekre. Tehát páratlan az osztók összege n^2 és $2n^2$ alakú számokra, minden más alakra páros az osztók összege.

Vizsgáljuk most a valódi osztók függvényét ami a $s(n) = \sigma(n) - n$ függvény. I

Léteznek-e olyan számok, melyekre:

- s(n)=n (tökéletes számok) (bizonyítás)
- s(n)=m és s(m)=n (barátságos számok) (példa ás bizonyítás)
- s(n)=m; s(m)=k és s(k)=n (hármas számlánc)
- négyes számlánc… (példa)

Ez elvezet bennünket egy kicsit a prímszámok kereséséhez, egy különleges versenyhez. Mersenne prímek keresése (Mersenne prímek táblázata, Lucas-Lehmer teszt)