Rekurzív sorozatok

Szoldatics József
Dunakeszi, Radnóti Miklós Gimnázium

Napjainkban egyre több versenyen jelenik meg rekurzív sorozat. Ezek megoldásához ad ötleteket ez az előadás, A feladatok csoportosítva vannak megoldási módszerek szerint. Egy ilyen csoport első feladatát megoldjuk itt az előadáson és ennek felhasználásával javaslom a többi feladat megoldását. Könnyítésül a cikk végén megtalálhatók a feladatok végeredményei.

Természetesen ezen feladatok esetében mindig járható út az, hogy kiszámolunk néhány tagot a sorozatból, megsejtjük a zárt alakot és ezt az alakot teljes indukció felhasználásával bizonyítjuk. De ez nem minden esetben járható ill. véleményem szerint általában nem járható. Ennek bizonysága, hogy ha a következő feladatokban a sorozatok elemeit kiszámoljuk, nem lehet olyan egyszerűen rájönni a zárt alakra.

Feladatok

Ha más nincs megadva, akkor minden sorozat esetében a feladat:
„Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot!”

1. $a_1 = 1;\quad a_n = a_{n-1} + 5 \qquad n \geq 2$

2. $a_1 = 1;\quad a_n = 3a_{n-1} \qquad n \geq 2$

3. $a_1 = 1;\quad a_n = 3a_{n-1} + 5 \qquad n \geq 2$

4. $a_1 = 1;\quad a_n = 3a_{n-1} + n \qquad n \geq 2$

5. $a_1 = 1;\quad a_n = 3a_{n-1} + n + 5 \qquad n \geq 2$

6. $a_1 = 1;\quad a_n = 7a_{n-1} + n^2 - 3 \qquad n \geq 2$

7. $a_1 = 0;\quad a_n = \frac{n-1}{n}\left(a_{n-1} + 1\right) \qquad n \geq 2$

8. $a_1 = 0;\quad a_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}\left(a_{n-1} + 1\right) \qquad n \geq 2$

9. $a_1 = 0;\quad a_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+4)(n+3)(n+2)}\left(a_{n-1} + 1\right) \qquad n \geq 2$

10. $a_1 = A;\quad a_n = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \frac{1}{n-1} \qquad n \geq 2$

11. $a_1 = 1;\quad a_n = 1 - \frac{n-1}{n} a_{n-1} \qquad n \geq 2$

12. $a_1 = 1;\quad a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)a_{n-1} \qquad n \geq 2$

13. $a_1 = 1;\quad a_n = (n-1)a_{n-1} + n^2 - 3n + 1 \qquad n \geq 2$

14. $a_1 = 2;\quad a_n = a_{n-1} + 4\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + 2 \qquad n \geq 2$

15. $a_1 = 1;\quad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2 - n} \qquad n \geq 2$

16. $a_1 = 1;\quad a_n = \frac{2013a_{n-1} + 2012}{2014a_{n-1} - 2013} \qquad n \geq 2 \qquad a_{2013} = ?$

17. $a_1 = 1;\quad a_n = \frac{2a_{n-1} - 4}{a_{n--1}} \qquad n \geq 2 \qquad a_{2013} = ?$

18. $a_1 = 3;\quad a_n = \frac{2a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 1} \qquad n \geq 2 \qquad a_{2013} = ?$

19. $a_1 = 1;\quad a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \qquad n \geq 2$

20. $a_1 = 1;\quad a_n = 25 + 10\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \qquad n \geq 2$

21. $a_1 = 1;\quad a_n = 4 + 4\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \qquad n \geq 2$

22. $a_1 = 1;\quad a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) \qquad n \geq 2$

23. $a_1 = 1;\quad a_n = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}\right) \qquad n \geq 2$ Bizonyítandó: $\forall\, a_i \in Q$

24. $a_1 = 1;\quad a_n = \frac{1}{2}\left(3a_{n-1} + \sqrt{5a_{n-1}^2 - 4}\right) \qquad n \geq 2$ Bizonyítandó: $\forall\, a_i \in Z$

25. $a_1 = 1;\quad a_n = 3a_{n-1} + \sqrt{8a_{n-1}^2 - 8} \qquad n \geq 2$ Bizonyítandó: $\forall\, a_i \in Z$

26. $a_1 = 2;\quad na_n = 2(2n-1)a_{n-1} \qquad n \geq 2$ Bizonyítandó: $\forall\, a_i \in Z$

1. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 1;\quad a_n = a_{n-1} + 5 \qquad n \geq 2$$

Megoldás

Ez a közismert számtani sorozat, de oldjuk meg most a rekurzív módszerrel! Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 5 \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 5 \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 5 \\ &\dots. \\ a_3 &= a_2 + 5 \\ a_2 &= a_1 + 5 \end{aligned}$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 = a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + 5(n-1)$$
$$a_n = 1 + 5(n-1) = 5n - 4$$

2. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 1; \quad a_n = 3a_{n-1} \qquad n \geq 2$$

Megoldás

Ez a közismert mértani sorozat, de oldjuk meg most a rekurzív módszerrel. Mivel az első elem nem nulla, ezért a második sem, ezért a harmadik sem, és ez így folytatódik. Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} \\ a_{n-1} &= 3a_{n-2} \\ a_{n-2} &= 3a_{n-3} \\ &\dots. \\ a_3 &= 3a_2 \\ a_2 &= 3a_1 \end{aligned}$$

Szorozzuk össze az egyenleteket. Ezt megtehetjük, hiszen egyik sor sem azonosan nulla. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_2 = a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot 3^{n-1}$$
$$a_n = 3^{n-1}$$

3. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 1; \quad a_n = 3a_{n-1} + 5 \quad n \geq 2$$

Megoldás

Itt most látszatra nem segít egyik előző módszer sem. Pedig egy egyszerű trükk segít, adjuk mind a két oldalhoz $\frac{5}{2}$-et. Hogy miért ezt és más nem lenne jó? Ez majd az előadáson ki fog derülni.

$$a_n = 3a_{n-1} + 5$$

$$a_n + \frac{5}{2} = 3a_{n-1} + 5 + \frac{5}{2} = 3a_{n-1} + \frac{15}{2}$$

$$a_n + \frac{5}{2} = 3\left(a_{n-1} + \frac{5}{2}\right)$$

Most vezessünk be egy új sorozatot a következő módon:

$$b_n = a_n + \frac{5}{2}; \quad b_1 = a_1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}; \qquad a_n = b_n - \frac{5}{2}$$

Erre a sorozatra

$$b_1 = \frac{7}{2}$$

$$b_n = 3b_{n-1}$$

ami egy sima mértani sorozat, ennek a zárt alakja

$$b_n = \frac{7}{2}3^{n-1}$$

és most visszatérünk az eredeti sorozatra

$$a_n = b_n - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}3^{n-1} - \frac{5}{2}$$

$$a_n = \frac{7 \times 3^{n-1} - 5}{2}$$

4. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 1; \quad a_n = 3a_{n-1} + n \quad n \geq 2$$

Megoldás

Próbáljuk az előző feladat módszerét itt is alkalmazni. Adjuk mind a két oldalhoz $\frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$-et. Hogy miért ezt és más nem lenne jó? Ez majd az előadáson ki fog derülni.

$$a_n = 3a_{n-1} + n$$

$$a_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} = 3a_{n-1} + n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} = 3a_{n-1} + \frac{3}{2}(n-1) + \frac{9}{4}$$

$$a_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} = 3\left(a_{n-1} + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{3}{4}\right)$$

Most vezessünk be egy új sorozatot a következő módon:

$$b_n = a_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}; \qquad b_1 = a_1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}; \quad a_n = b_n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$$

Erre a sorozatra

$$b_1 = \frac{9}{4}$$
$$b_n = 3b_{n-1}$$

ami egy sima mértani sorozat, ennek a zárt alakja

$$b_n = \frac{9}{4}3^{n-1}$$

és most visszatérünk az eredeti sorozatra

$$a_n = b_n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}3^{n-1} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$$
$$a_n = \frac{9 \cdot 3^{n-1} - 2n - 3}{4}$$

7. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 0; \quad a_n = \frac{n-1}{n}(a_{n-1} + 1) \qquad n \geq 2$$

Megoldás

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \frac{n-1}{n}(a_{n-1} + 1)$$
$$na_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$\begin{aligned} na_n &= (n-1)a_{n-1} + (n-1) \\ (n-1)a_{n-1} &= (n-2)a_{n-2} + (n-2) \\ (n-2)a_{n-2} &= (n-3)a_{n-3} + (n-3) \\ &\dots. \\ 3a_3 &= 2a_2 + 2 \\ 2a_2 &= a_1 + 1 \end{aligned}$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 = (n-1)a_{n-1} + \ldots 2a_2 + a_1 + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$$
$$na_n = a_1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]$$

azaz

$$na_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} i = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

mivel a sorozat első eleme $a_1 = 0$, ezért

$$na_n = \frac{n(n-1)}{2}$$
$$a_n = \frac{n-1}{2}$$

8. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 0; \quad a_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1}+1) \qquad n \geq 2$$

Megoldás

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1}+1)$$
$$(n+2)(n+1)a_n = n(n-1)a_{n-1} + n(n-1)$$

Szorozzuk végig mind a két oldalt $(n+1)n$-nel, ami nyilván nem nulla. Azért ezt a kifejezést választottuk, hogy a rekurziós összefüggésünkben az index léptetése után egyforma együtthatók jöjjenek létre a két oldalon.

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^2(n^2-1)$$

A jobb oldal második tagját kifejtve

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^4 - n^2$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^4 - n^2$$
$$(n+1)n^2(n-1)a_{n-1} = n(n-1)^2(n-2)a_{n-2} + (n-1)^4 - (n-1)^2$$
$$n(n-1)^2(n-2)a_{n-2} = (n-1)(n-2)^2(n-3)a_{n-3} + (n-2)^4 - (n-2)^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$5\cdot 4^2\cdot 3a_3 = 4\cdot 3^2\cdot 2a_2 + 3^4 - 3^2$$
$$4\cdot 3^2\cdot 2a_2 = 3\cdot 2^2\cdot 1a_1 + 2^4 - 2^2$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = 12a_1 + \sum_{i=2}^{n} i^4 - \sum_{i=2}^{n} i^2 = 12a_1 + \sum_{i=1}^{n} i^4 - \sum_{i=1}^{n} i^2$$

azaz

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[\frac{3n^2+3n-1}{5} - 1\right] =$$
$$= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-6)}{30} = 12a_1 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(2n+1)}{10}$$

mivel a sorozat első eleme $a_1 = 0$, ezért

$$(n+2)(n+1)^2 n a_n = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(2n+1)}{10}$$

$$a_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}$$

13. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 1;\quad a_n = (n-1)a_{n-1} + n^2 - 3n + 1 \qquad n \geq 2$$

Megoldás

Végezzünk egy kis átalakítást a rekurziós formulán

$$a_n = (n-1)a_{n-1} + n^2 - 3n + 1$$

$$a_n + n = (n-1)a_{n-1} + n^2 - 2n + 1$$

$$a_n + n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)^2$$

$$a_n + n = (n-1)(a_{n-1} + n - 1)$$

Most vezessünk be egy új sorozatot a következő módon:

$$b_n = a_n + n;\qquad b_1 = a_1 + 1 = 2;\qquad\qquad a_n = b_n - n$$

Erre a sorozatra

$$b_1 = 2$$

$$b_n = (n-1)b_{n-1}$$

Mivel az első elem nem nulla, ezért a második sem, ezért a harmadik sem, és ez így folytatódik.

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$b_n = (n-1)b_{n-1}$$

$$b_{n-1} = (n-2)b_{n-2}$$

$$b_{n-2} = (n-3)b_{n-3}$$

$$\ldots\ldots$$

$$b_3 = 2b_2$$

$$b_2 = 1b_1$$

Szorozzuk össze az egyenleteket. Ezt megtehetjük, hiszen egyik sor sem azonosan nulla. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$b_n \cdot b_{n-1} \cdot \ldots \cdot b_2 = b_{n-1} \cdot \ldots \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$$b_n = 2 \cdot (n-1)!$$

és most visszatérünk az eredeti sorozatra

$$a_n = b_n - n = 2 \cdot (n-1)! - n$$

$$a_n = 2 \cdot (n-1)! - n$$

16. feladat

Adjuk meg a sorozat 2013. elemét:

$$a_1 = 1; \quad a_n = \frac{2013a_{n-1} + 2012}{2014a_{n-1} - 2013} \qquad n \geq 2 \qquad a_{2013} = ?$$

Megoldás

Számítsuk ki elemeket a sorozatból:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 4025$$
$$a_3 = 1$$

Tehát egy olyan sorozattal van dolgunk, ami periodikus. Esetünkben a periódus hossza 2, ami azt jelenti, hogy minden páratlan indexű elem megegyezik, tehát $a_{2013} = 1$

19. feladat

Adjuk meg zárt alakban a következő sorozatot:

$$a_1 = 1; \qquad a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \quad n \geq 2$$

Megoldás

A sorozat megadási módjából következik, hogy $a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} > 9 \qquad n \geq 2$

Most két megoldási módot is megnézünk.

I. Megoldás

Írjuk fel az előző elemre is a rekurziós összefüggést:

$$a_{n-1} = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}}$$

$$\left(\frac{a_{n-1} - 9}{6}\right)^2 = a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}$$

Ezt most használjuk fel az eredeti rekurziós összefüggésbe

$$a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} = 9 + 6\sqrt{\left(\frac{a_{n-1} - 9}{6}\right)^2 + a_{n-1}} = 9 + 6\sqrt{\left(\frac{a_{n-1} + 9}{6}\right)^2}$$

$$a_n = 9 + 6 \cdot \frac{a_{n-1} + 9}{6} = a_{n-1} + 18$$

Ez egy számtani sorozat, de csak a 3. elemtől igaz az összefüggés (miért?)

$$a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} > 9 \qquad n \geq 2$$
$$a_n = a_2 + 18 \cdot (n - 2) = 18n - 21$$

A keresett összefüggés

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 18n - 21 & n \geq 2 \end{cases}$$

II. Megoldás

Rendezzük át a rekurziós összefüggést

$$a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 9 + 6\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \left(3 + \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}\right)^2$$

$$\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n} = 3 + \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}$$

Most vezessünk be egy új sorozatot a következő módon:

$$b_n = \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}; \quad b_1 = \sqrt{a_1} = 1; \qquad a_n = b_n^2 - b_{n-1}^2 \quad n \geq 2$$

Erre a sorozatra

$$b_1 = 1$$

$$b_n = b_{n-1} + 3$$

Ez egy számtani sorozat, amire

$$b_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

és most visszatérünk az eredeti sorozatra

$$a_n = b_n^2 - b_{n-1}^2 = (3n-2)^2 - (3n-5)^2 = 18n - 21$$

A keresett összefüggés

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 18n - 21 & n \geq 2 \end{cases}$$

23. feladat

Esetünkben azt, hogy minden elem racionális a következő sorozatban:

$$a_1 = 1; \qquad a_n = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}\right) \qquad n \geq 2$$

Megoldás

A sorozat megadási módjából következik, hogy $a_n > \frac{1}{16} > 0 \quad n \geq 2$

Most is két megoldási módot is megnézünk.

I. Megoldás

Ha valamelyik elem racionális a sorozatban, akkor a következő elem racionalitása csak a gyökös kifejezésen múlik. Tehát, ha be tudjuk látni, hogy a gyökös kifejezések racionalitása öröklődik, akkor a sorozat minden eleme racionális lesz.

Rendezzük át a rekurziós összefüggést

$$a_n = \frac{1}{16}\left(1+4a_{n-1}+\sqrt{1+24a_{n-1}}\right)$$
$$24a_n = \frac{3}{2}+6a_{n-1}+\frac{3}{2}\sqrt{24a_{n-1}+1}$$
$$24a_n+1 = \frac{5}{2}+6a_{n-1}+\frac{3}{2}\sqrt{24a_{n-1}+1}$$
$$24a_n+1 = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{24a_{n-1}+1}\right)^2$$
$$\sqrt{24a_n+1} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{24a_{n-1}+1}$$

Ez utóbbi azt mondja, hogy ha egyszer a $\sqrt{24a_{i-1}+1}$ kifejezés racionális, akkor következő megfelelő kifejezés, azaz a $\sqrt{24a_i+1}$ is racionális. Az első elemre $\sqrt{24a_1+1}=5$ racionális, tehát akkor minden elem a sorozatban racionális.

II. Megoldás

Megadjuk a sorozat zárt alakját, ami bizonyítani fogja a racionalitást.

Rendezzük át a rekurziós összefüggést

$$a_n = \frac{1}{16}\left(1+4a_{n-1}+\sqrt{1+24a_{n-1}}\right)$$
$$96a_n = 6\left(1+4a_{n-1}+\sqrt{1+24a_{n-1}}\right)$$
$$96a_n+4 = 10+24a_{n-1}+6\sqrt{1+24a_{n-1}}$$
$$4(24a_n+1) = \left(3+\sqrt{1+24a_{n-1}}\right)^2$$
$$2\sqrt{24a_n+1} = \sqrt{24a_{n-1}+1}+3$$
$$2\sqrt{24a_n+1}-6 = \sqrt{24a_{n-1}+1}-3$$
$$2\left(\sqrt{24a_n+1}-3\right) = \sqrt{24a_{n-1}+1}-3$$

Most vezessünk be egy új sorozatot a következő módon:

$$b_n = \sqrt{24a_n+1}-3; \qquad b_1 = \sqrt{24a_1+1}-3 = 2; \qquad a_n = \frac{1}{24}(b_n+3)^2-\frac{1}{24}$$

Erre a sorozatra

$$b_1 = 2$$
$$2b_n = b_{n-1}$$
$$b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$$

Ez egy mértani sorozat, aminek az összefüggése:

$$b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{2^n}$$

és most visszatérünk az eredeti sorozatra

$$a_n = \frac{1}{24}\left(\frac{4}{2^n} + 3\right)^2 - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}\left(\frac{16}{2^{2n}} + \frac{24}{2^n} + 9\right) - \frac{1}{24} = \frac{2}{3 \cdot 2^{2n}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{3 \cdot 2^{2n}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3}$$

Ez pedig egy racionális kifejezés.

Hasznos/szükséges összefüggések a megoldásokhoz

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30} = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12} = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^3 - n^2}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)}{42} = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)}{24} = \frac{3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2}{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)}{90} =$$

$$= \frac{10n^9 + 45n^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n}{90}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{n^2(n+1)^2(n^2 + n - 1)(2n^4 + 4n^3 - n^2 - 3n + 3)}{20} =$$

$$= \frac{2n^{10} + 10n^9 + 15n^8 - 14n^6 + 10n^4 - 3n^2}{20}$$

Végeredmények

A feladatok végeredményei a következők:

1. $a_n = 1 + 5(n-1) = 5n - 4$
2. $a_n = 3^{n-1}$
3. $a_n = \dfrac{7 \cdot 3^{n-1} - 5}{2}$

4. $a_n = \dfrac{9 \times 3^{n-1} - 2n - 3}{4}$

5. $a_n = \dfrac{19 \times 3^{n-1} - 2n - 13}{4}$

6. $a_n = \dfrac{71 \times 7^{n-1} - 9n^2 - 21n + 13}{54}$

7. $a_n = \dfrac{n-1}{2}$

8. $a_n = \dfrac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}$

9. $a_n = \dfrac{n^{10} + 15n^9 + 90n^8 + 270n^7 + 393n^6 + 135n^5 - 340n^4 - 420n^3 - 144n^2}{10(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n} = \dfrac{(n-1)n}{10(n+2)}$

10. $a_n = \begin{cases} A & n = 1 \\ \dfrac{n}{2(n-1)} & n \geq 2 \end{cases}$

11. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & n = 2k \\ \dfrac{n+1}{2n} & n = 2k+1 \end{cases}$

12. $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$

13. $a_n = 2 \cdot (n-1)! - n$

14. $a_n = 2n^2$

15. $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$

16. $a_{2013} = 1$

17. $a_{2013} = 4$

18. $a_{2013} = \dfrac{2}{3}$

19. $a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 18n - 21 & n \geq 2 \end{cases}$

20. $a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8n - 8 & n \geq 2 \end{cases}$

21. $a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 50n - 65 & n \geq 2 \end{cases}$

22. $a_n = (n+1)2^{n-2}$

23. $a_n = \dfrac{2}{3\times 2^{2n}} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3}$

24. $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$

25. $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$

26. $a_n = \dfrac{2^n \times 1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{n!} = \dfrac{(2n)!}{n!\times n!} = \dbinom{2n}{n}$