MEMO
(Middle European Mathematical Olympiad)

A feladatmegoldó szemináriumon első részében egy rövid beszámolót fognak hallani a 2010. szeptember 9 és 15. között Strečno-ban (Szlovákia) megrendezett 4. MEMO-ról. Majd pedig a 2009-es Poznani 3. MEMO feladataiból oldunk meg néhányat.

1. Feladat
Adjuk meg az összes $f: R \to R$ függvényt, melyre

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

minden $x, y \in R$ esetén.

Megoldás
Nyilvánvaló, hogy az $f(x) \equiv 0$ függvény kielégíti a függvényegyenletet.

Keressük meg a további megoldásokat, azaz tegyük fel, hogy $\exists c \in R$, melyre $f(c) \neq 0$

Tegyük fel továbbá, hogy $\exists y_1, y_2 \in R$ különböző számok, melyre $f(y_1) = f(y_2)$

Helyettesítsük most az egyenletbe a (c, y_1) értékeket:

$$f(cf(y_1)) + f(f(c) + f(y_1)) = y_1 f(c) + f(c + f(y_1))$$

Helyettesítsük most az egyenletbe a (c, y_2) értékeket:

$$f(cf(y_2)) + f(f(c) + f(y_2)) = y_2 f(c) + f(c + f(y_2))$$

Most vonjuk ki ezt a két egyenletet egymásból, közben használjuk ki azt, hogy $f(y_1) = f(y_2)$, kapjuk:

$$0 = f(c)(y_1 - y_2)$$

Ami ellentmondás, hiszen ennek a szorzatnak egyik tényezője sem nulla.. Tehát a keresett függvény injektív, minden értéket legfeljebb egyszer vesz fel.

Helyettesítsük most az egyenletbe a $(0,1)$ értékeket:

$$f(0f(1)) + f(f(0) + f(1)) = 1f(0) + f(0 + f(1))$$

$$f(0) + f(f(0) + f(1)) = f(0) + f(f(1))$$

$$f(f(0) + f(1)) = f(f(1))$$

Mivel a függvény injektív, ezért a függvény argumentuma a két oldalon megegyezik, azaz

$$f(0) + f(1) = f(1)$$

$$f(0) = 0$$

Helyettesítsük most az egyenletbe a $(x,0)$ értékeket:

$$f(xf(0)) + f(f(x) + f(0)) = 0f(x) + f(x + f(0))$$

$$f(0) + f(f(x)) = f(x)$$

$$f(f(x)) = f(x)$$

Mivel a függvény injektív, ezért a függvény argumentum a két oldalon megegyezik, azaz

$$f(x) = x$$

Összefoglalva: a függvényegyenletet két függvény elégíti ki, ezek:

$$f(x) \equiv 0 \qquad \text{és} \qquad f(x) = x$$

2. Feladat

Tegyük fel, hogy van $n \geq 3$ különböző színünk. Legyen $f(n)$ a legnagyobb egész, melyre egy $f(n)$ csúcsú konvex sokszög oldalai és átlói megszínezhetők ezzel az n színnel a következő módon:

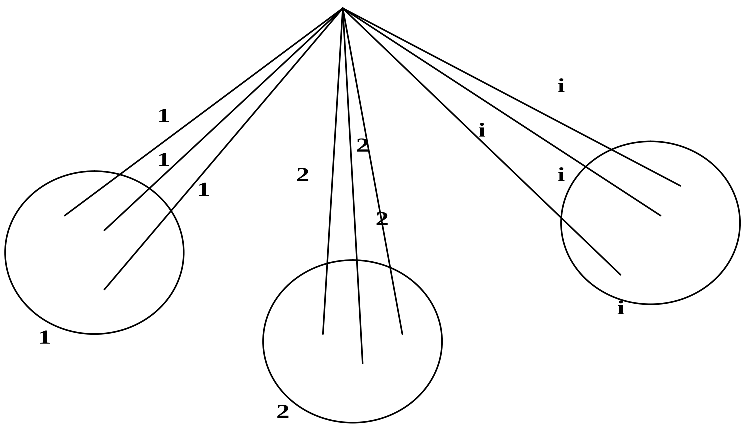
- legalább két színt használunk, és
- akárhogyan is választjuk ki három csúcsát a sokszögnek, az általuk meghatározott három szakasz vagy mind egyszínű, vagy mind különböző színűek.

Mutassuk meg, hogy $f(n) \leq (n-1)^2$.

Megoldás

Tüntessünk ki egy tetszőleges pontot és tekintsük az innen kiinduló szakaszokat. Az első színű szakaszok végpontjait soroljuk az 1-es csoportba, a második színű szakaszok végpontjait soroljuk a 2-es csoportba és így tovább az n-edik csoportba.

Vegyük ezen csoportok közül az i-ediket. Ezen pontok között csak i színű szakasz lehet a feltételek miatt. Tehát a csoportokon belül csak azonos színű szakaszok lehetségesek.



Tekintsük most az 1-es csoportból az egyik csúcsot és az onnan a 2-es csoportba mutató szakaszokat. A következők igazak:

- Egyik sem lehet 1-es színű vagy 2-es színű (a 2. feltétel miatt)
- Két azonos szín nem indulhat ki (a 2. feltétel miatt)

Tehát innen legfeljebb $n-2$ színű különböző szakasz indulhat ki és egyik szín sem szerepelhet többször, tehát a 2-es csoport $n-2$ csúcsnál nem állhat több tagból.

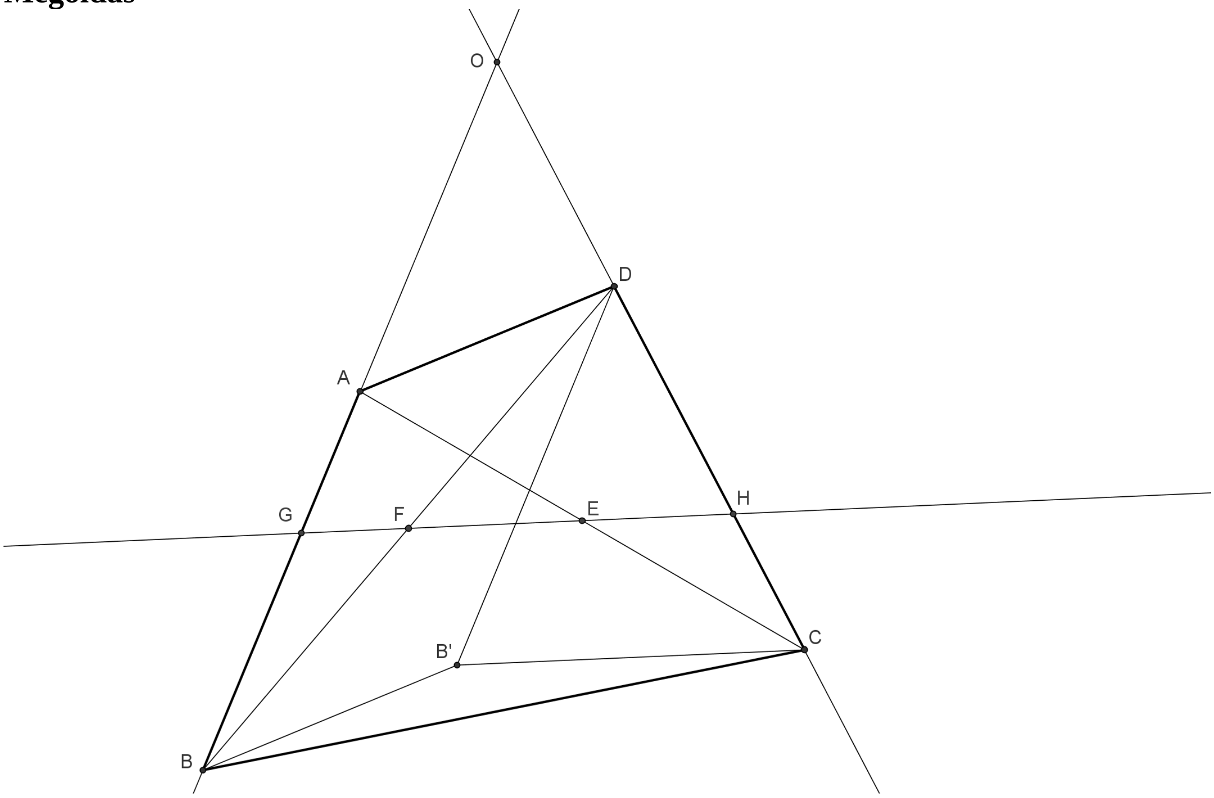
Ezt elmondhatjuk az összes csoportra, így a sokszög csúcsainak számára

$$f(n) \leq n(n-2) + 1 = (n-1)^2$$

És ezt akartuk bizonyítani.

3. Feladat
Legyen ***ABCD*** egy konvex négyszög, melyre ***AB*** és ***CD*** nem párhuzamosak valamint ***AB***=***CD***. Az ***AC*** és ***BD*** átlók felezőpontjait ***E*** és ***F*** jelöli. Az ***EF*** egyenes az ***AB*** és ***CD*** szakaszokat rendre ***G*** és ***H*** pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy ***AGH***Đ=***DHG***Đ

Megoldás



Legyen BB'DA paralelogramma. Használjunk vektorokat az ábra szerint.

Legyen $\overrightarrow{AB} = \underline{x}$ és $\overrightarrow{DC} = \underline{y}$. A feltétel szerint $|\underline{x}| = |\underline{y}|$.

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \underline{y}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \underline{x} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \frac{\underline{y} - \underline{x}}{2} = \frac{\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB'}}{2}$$

Ez azt jelenti, hogy FE párhuzamos B'C szakasszal. Mivel B'CD háromszög egyenlőszárú és az alapja B'C, ez bizonyítja az állítást.

4. Feladat
Legyenek x, y, z valós számok, melyekre $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

Megoldás
Használjuk a következő állítást:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 9 + 6\left(x^2 - 4x + 3\right) = (x-1)^2 (x-3)^2 \geq 0$$
$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 9 \geq -6\left(x^2 - 4x + 3\right)$$
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x \in \{1;3\}$

Ezt írjuk fel y és z-re is
$$\begin{cases} x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 9 \geq -6\left(x^2 - 4x + 3\right) \\ y^4 - 8y^3 + 16y^2 - 9 \geq -6\left(y^2 - 4y + 3\right) \\ z^4 - 8z^3 + 16z^2 - 9 \geq -6\left(z^2 - 4z + 3\right) \end{cases}$$

Adjuk őket össze:
$$x^4 + y^4 + z^4 - 8\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 16\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 27 \geq -6\left[\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 4(x+y+z) + 9\right]$$

A feltételt felhasználva, hogy
$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x+y+z)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4(x+y+z) + 9 = 0$$

kapjuk, hogy
$$x^4 + y^4 + z^4 - 8\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 16\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 27 \geq 0$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + 16\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 8\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 27$$
És ezt akartuk bizonyítani.

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x \in \{1;3\}$ és $y \in \{1;3\}$ és $z \in \{1;3\}$

5. Feladat
Egy táblára a 0, 1, 2, …, n ($n \geq 2$) számok vannak felírva. Minden lépésben letörlünk a tábláról egy számot, amely két, még a táblán lévő különböző szám számtani közepe. Ezt addig csináljuk, amíg már nincs olyan szám a táblán, amit le lehetne törölni. Jelölje $g(n)$ azt, hogy legkevesebb hány szám maradhat végül a táblán. Adjuk meg $g(n)$-et minden n-re.

Megoldás
A legkisebb számot (a nullát) és a legnagyobb számot (n-et) biztosan nem lehet letörölni. Tehát $g(n) \geq 2$.
Állítjuk, hogy $g\left(2^k\right) = 2$. A letörlést kezdjük a következőképpen: először töröljük le a páratlan számokat, amelyeknek minden szomszédjuk páros, menni fog. Így a táblán a már csak páros számok maradnak. Gondolatban osszuk el őket kettővel, és a páratlan hányadosú számokat töröljük le. A maradék számokat gondolatban osszuk el 4-gyel és a páratlan hányadosú számokat töröljük. És így tovább, míg a végén csak 2 szám marad. A folyamatot leírhatjuk úgy is, hogy gondolatban a számokat 2-es számrendszerben írjuk fel, és első lépésben letöröljük a 1-es helyi értéken 1-est tartalmazókat, a második lépésben a 2-es helyi értéken 1-est tartalmazókat és így tovább.

Legyen most $n \neq 2^k$ alakú. Tegyük fel, hogy csak 2 szám maradt a táblán (a legkisebb és a legnagyobb).

I. eset, n páratlan. Ekkor ha csak 2 szám maradna a táblán, akkor utoljára mit töröltünk le? Csak a $\frac{0+n}{2}$ számot lehet, de ez nem egész, tehát $g(n) \geq 3$ ebben az esetben.

II. eset, n páros. Ekkor ha csak 2 szám maradna a táblán, akkor utoljára mit töröltünk le? Csak a $\frac{0+n}{2}$ számot lehetett. Ez azt jelenti, hogy n-ben levő páratlan prímek megtalálhatók az utoljára letörölt számban is. Folytassuk tovább ezt a gondolatot, mi lehetett az ezelőtt letörölt szám? Arra jutunk, hogy csak olyan számokat töröltünk, ami tartalmazza n páratlan prímjeit. És ezt folytatva látható, hogy nem lehet visszaállítani az eredeti számsorrendet, tehát kettőnél több számnak kellett maradnia a táblán, azaz $g(n) \geq 3$ ebben az esetben is.

Megmutatjuk, hogy 3 szám már maradhat a táblán, így $g(n) = 3$.

Legyen $2^{k-1} < n < 2^k$. Végezzük a következő lépéseket: először töröljük le az n-1, majd n-2, n-3, … $2^{k-1}+1$ számokat ebben a sorrendben. Utána az előző eset szerint minden törölhető a 0 és 2^{k-1} között, így 3 szám maradt a táblán.

6. Feladat
Adjuk meg az összes nemnegatív egész megoldását az alábbi egyenletnek:

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

Megoldás
A jobb oldal osztható 3-mal, tehát a bal oldalnak is oszthatónak kell lennie, tehát ***x*** páros szám. A jobb oldal osztható 5-tel, tehát ***x*** 4-gyel osztható szám, $x = 4a$. Most a bal oldal 8-cal osztva 1 maradékot ad, tehát a jobb oldalnak is ezt kell adnia, azaz ***y*** is és ***z*** is páros szám, $y = 2b$ és $z = 2c$. Ezeket felhasználva és rendezve:

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

$$2^{4a} + 2009 = 3^{2b} 5^{2c}$$

$$2009 = \left(3^b 5^c\right)^2 - \left(2^{2a}\right)^2$$

$$2009 = \left(3^b 5^c - 2^{2a}\right)\left(3^b 5^c + 2^{2a}\right)$$

Ez azt jelenti, hogy 2009-et felírtuk két nem negatív egész szám szorzatára. Innen már visszaszámolható a megoldások, mivel ez a felírás véges sok módon (3 eset) lehetséges

Táblázatba foglalva az eseteket

$3^b 5^c - 2^{2a}$	$3^b 5^c + 2^{2a}$	$3^b 5^c$	2^{2a}	
1	2009	1005	1004	Nem egész megoldás
7	287	144	137	Nem egész megoldás
41	49	45	4	$a = 1,\ b = 2,\ c = 1$

Ekkor $x = 4,\ y = 4,\ z = 2$

7. Feladat
Adjuk meg az összes (m,n) egész számpárt, mely kielégíti az alábbi egyenletet:

$$(m+n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn$$

Megoldás

Vezessünk be új ismeretleneket:

$$x = (m+n)^2 \text{ és } y = mn$$

Ekkor az egyenlet a rendezés után

$$x^2 - x = y^2 + 4y$$

Fogjuk ezt fel, mint y-ban ismeretlent, és oldjuk meg

$$x^2 - x = y^2 + 4y$$

$$0 = y^2 + 4y - (x^2 - x)$$

$$y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{x^2 - x + 4}$$

A gyök alatt négyzetszámnak kell lennie, de mivel

$$(x-1)^2 < x^2 - x + 4 < x^2$$

igaz minden x>5 esetén, ezért csak 0-t, 1-et és 4-et vehet fel az x.

A lehetséges eseteket táblázatba foglalva

x	*y*	Megoldások (m,n)
0	-4	(2;-2) (-2;2)
0	0	(0;0)
1	0	(1;0) (-1;0) (0;1) (0;-1)
1	-4	-
4	2	-
4	-6	-

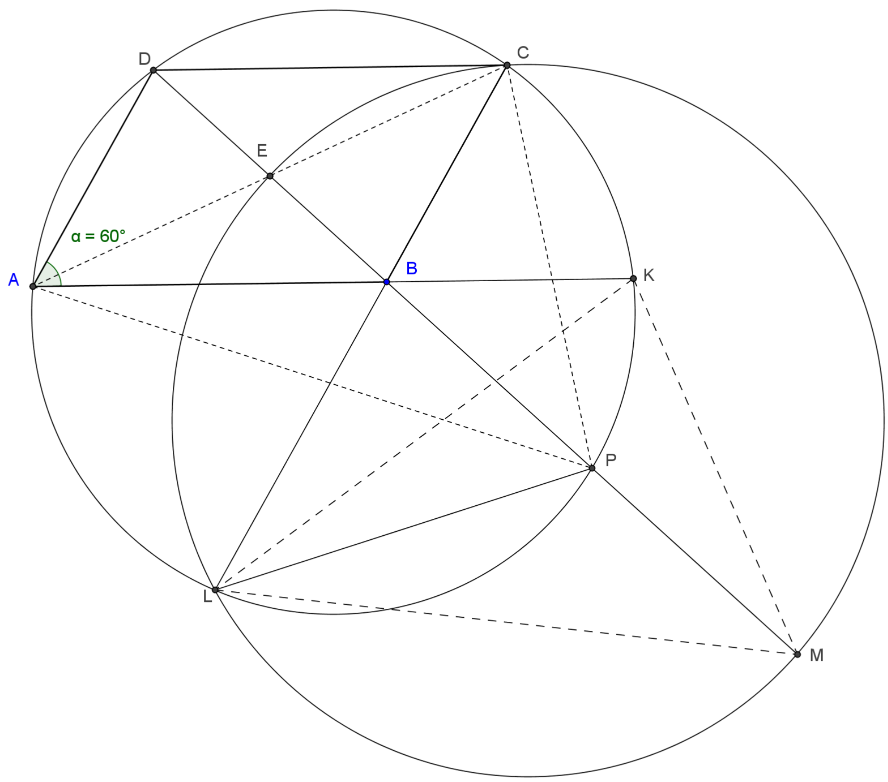
Összefoglalva: a lehetséges megoldások: (2;-2), (-2;2), (0;0) (1;0), (-1;0), (0;1), (0;-1)

8. Feladat

Legyen ABCD egy paralelogramma, melyre BADÐ = 60°, az átlók metszéspontját jelölje E. Az ACD háromszög körülírt köre a BA egyenest K-ban (K ≠ A), a BD egyenest P-ben (P ≠ D) és a BC egyenest L-ben (L ≠ C) metszi. Az EP egyenes és a CEL háromszög körülírt köre az E és M pontokban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a KLM és CAP háromszögek egybevágóak.

Megoldás

Megrajzoltuk a feladat ábráját. Még külön megrajzoltuk a LP szakaszt.



A DL szakasz a C pontból 60°-os szögben látszik, azaz

DCLÐ =DPLÐ = 60°

Másrészt DALÐ =180° - DCLÐ = 120° és LPMÐ =180° - LPDÐ = 120° és LAKÐ = 60°

Közös látókör követeztében

LKAÐ = LCAÐ = LCEÐ = LMEÐ

Háromszög szögeinek számolásával

BLKÐ = 180° - LKBÐ - KBLÐ = 180° - LMPÐ - MPLÐ = PLMÐ

Tehát

KLMÐ = CLPÐ = CAPÐ

Azaz a két háromszögnek az egyik szöge megegyezik.

Az ábra az MD „tengelyre” szimmetrikus, ha a betűket cseréljük, hasonló módon kapható, hogy ACPÐ = LKMÐ, azaz a két háromszög 2 szöge megegyezik.

AC szakasz D-ből 120° alatt látható, az LK szakasz A-ból 60°-ból látható ugyanabban a körben, tehát megegyeznek.

Összefoglalva a két háromszögnek 1 oldala és azon az oldalon levő 2 szöge megegyezik, tehát egybevágó

9**. Feladat**

Egy 2009x2009-es tábla minden mezőjét n-szín valamelyikére színezzük (nem kell feltétlenl minden színt használni). Egy színt összefüggőnek nevezünk, ha vagy csak egy ilyen szín mező van. Vagy bárhogyan választva két ilyen színű mezőt el lehet jutni az egyikből a másikba egy vezérrel lépkedve olyan módon, hogy közben egyszer sem lépünk más színű mezőre (egy vezér vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan léphet). Adjuk meg a legnagyobb n egészt, melyre minden színezés esetén a táblán szereplő színek közül legalább egy összefüggő.

Megoldás
Oldjuk meg a feladatot tetszőleges méretre, ne 2009-es táblára.

Állítjuk, hogy n=3 esetén létezik olyan színezése a táblának, ami nem összefüggő. Ezt mutatja a következő táblázat, a színeket 1,2 és 3 jelzi

3	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1
1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3	3
1	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3
2	3	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3
1	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3
1	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3
2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3	3
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2

És így folytatva tovább. Látható, hogy az első függőleges oszlopból sem az 1-es, sem a 2-es szín nem érhető el a vízszintes legfelső sorból. Valamint a bal felső sarokban levő 3-as nem érhető el semelyik másik hármasból sem.

Most bizonyítjuk, hogy 2 szín felhasználásával biztosan összefüggő lesz a színezés. A bizonyítás teljes indukcióval történik. 1x1, 2x2 és 3x3-as tábla esetén könnyen látható, hogy biztosan összefüggő lesz a színezés.

Tegyük fel, hogy k-s tábla esetén bármilyen színezés összefüggő lesz (valamelyik színre).

Nézzük a (k+1)–es táblát.
Vegyük egy tetszőleges színezést. Ennek vegyük az ábra szerinti k x k-s részét. Ez valamelyik szín szerint biztosan összefüggő, legyen ez a szín az 1-es. A jobb felső sarokban *-gal jelölt mezőt vegyük ki a továbbiakban.

				#				*

A felső sorban és az utolsó oszlopban nem szerepelhet csupa 1-es vagy csupa 2-es, mert akkor az egész tábla biztosan összefüggő lesz az adott színre. Tehát mind a két helyen szerepel mind a két szín. A * színe bármi is, ez biztosan elérhető az előbb említett mezőkről.

				#				*

Tehát van valahol a felső sorban 1-es szín, legyen ez a #-sel jelölt.
Ha az oszlopában valahol van 1-es szín, akkor az egész táblázat 1-es színre összefüggő.
Ha csak 2-es szín van alatta, akkor az ábra szerint végig 2-es színű mezőknek kell állnia a megjelölt helyeken, de ekkor pedig a 2-es színre lesz összefüggő a táblázat.

			2	2	2			
		2		2		2		
	2			2			2	
2				2				
				2				
				2				
				2				
				2				

Tehát k+1-re is összefüggő lesz két szín esetén a táblázat.

Szoldatics József
Radnóti Miklós Gimnázium
Dunakeszi