Egészrész / törtrész

A feladatmegoldó szemináriumon megbeszélésre kerül a manapság versenyeken egyre többször előforduló egészrész és törtrész egyenletek megoldási módszerei, ötletei.

Az előadáson a következő feladatok megoldására kerül sor (többek között):

- $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$
- $\left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$
- $[2x]=x-1$
- $[2x]=[x]-1$
- $[9x]=9$
- $2^{[x]}=2x+1$
- $\left[2^{x}\right]=2x+1$
- $[x]+[2x]+[3x]=[6x]$
- $\left[\frac{[x]+[2x]+[3x]}{6}\right]=x$
- $\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$

A feladatok lehetséges megoldási módjai közül nézzünk egyet:

Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket két intervallumra bontva!

Legyen $n \le x < n+\frac{1}{2}$, $n \in Z$, ekkor

$$\begin{cases} n-\frac{1}{2} \le x-\frac{1}{2} < n \\ n+\frac{1}{2} \le x+\frac{1}{2} < n+1 \\ 2n \le 2x < 2n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x]=n-1 \\ \left[x+\frac{1}{2}\right]=n \\ [2x]=2n \end{cases} \Rightarrow (n-1)+n=2n$$

Ami ellentmondás, ebben az intervallumban nincs megoldása a feladatnak.

Legyen $n+\frac{1}{2} \le x < n+1$, $n \in Z$, ekkor

$$\begin{cases} n \le x-\frac{1}{2} < n+\frac{1}{2} \\ n+1 \le x+\frac{1}{2} < n+\frac{3}{2} \\ 2n+1 \le 2x < 2n+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x]=n \\ \left[x+\frac{1}{2}\right]=n+1 \\ [2x]=2n+1 \end{cases} \Rightarrow n+(n+1)=2n+1$$

Azaz azonossággal van dolgunk.

Tehát a feladat összes megoldása $n+\frac{1}{2} \le x < n+1$, $n \in Z$ alakú

Szoldatics József
Szilágyi Erzsébet Gimnázium
Budapest