Rekurzív sorozatok zárt alakban való megadása generátor függvény segítségével

A rekurzív sorozat olyan sorozat, melynek elemeit a sorozatban a megelőző elemek ismeretében lehet kiszámítani.

Lineáris rekurzióról akkor beszélünk, ha a sorozat n-edik (általános) tagját az előtte szereplő néhány tag lineáris kombinációjaként állítjuk elő, azaz

$$a_{n+1} = c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot a_{n-1} + \ldots + c_k \cdot a_{n+1-k}$$

> A rekurzív sorozatokkal történet első találkozásom évvekel ezelött, Nagykanizsán volt. Ekkor – még gimnazistaként – a következő sorozat tanulmányozása volt a feladat:
>
> $$a_1 = 13$$
> $$a_2 = 29$$
> $$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$$
>
> Vizsgálgatva láttuk, hogy nem túl szép a sorozat, addigi ismereteink kevésnek tűntek a megoldáshoz.
>
> – Számtani a sorozat? – szólt a tanári segítő kérdés.
> – Nem! – volt a válasz természetesen.
> - Akkor mértani! – szólt a megfellebezhetetlen konklúzió.
>
> És nekiálltunk… Ha mértani, akkor keressük $a_n = a \cdot q^{n-1}$ alakban. Ezt behelyettesítve és rendezve
>
> $$a \cdot q^n = 5a \cdot q^{n-1} - 6a \cdot q^{n-2}$$
> $$q^2 = 5q - 6$$
> $$q^2 - 5q + 6 = 0$$
> $$q_1 = 2 \qquad q_2 = 3$$
>
> Kaptunk 2 sorozatot is, ezek:
>
> $$a_n = a \cdot 2^{n-1} \quad \text{és} \quad a_n = a \cdot 3^{n-1}$$
>
> A próba mutatja, hogy egyik sorozat sem jó, próbáljuk meg a két sorozatot együtt, azaz
>
> $$a_n = C_1 \cdot 2^{n-1} + C_2 \cdot 3^{n-1}$$
>
> Az első két elemt ismerjük, azaz:
>
> $$\left.\begin{aligned} 13 &= C_1 + C_2 \\ 29 &= 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = 10; \qquad C_2 = 3$$
>
> Azaz
>
> $$a_n = 10 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} = 5 \cdot 2^n + 3^n$$
>
> És ez jó, mint az ellenőrzés mutatja! Akkor, érthetetlen volt a dolog. Miért pont így kell megoldani, amikor közben volt nyilvánvalóan helytelen állítás!

Sajnos, amennyiben a képzési szabályon egy kicsit módosítunk, például:

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} + 1$$

már nem működik a módszer. Akkor most mit lehet tenni?

Az előadásomban ismertetnék az előzőektől különböző módszert, amely az ilyen esetekben is használható, ez a módszer a genereátor függvény felhasználásával történik.

Az előadásban támaszkodom a következőkre:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad |x|<1$$

$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots=1+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x^2-x+1}{(1-x)^2} \qquad |x|<1$$

$$1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^3}=\frac{1+x}{(1-x)^3} \qquad |x|<1$$

$$1+1^2x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\ldots=1+\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=\frac{1-2x+4x^2-x^3}{(1-x)^3} \qquad |x|<1$$

$$1+qx+q^2x^2+q^3x^3+q^4x^4+\ldots=\frac{1}{1-qx} \qquad |qx|<1$$

$$1+2qx+3q^2x^2+4q^3x^3+\ldots=\frac{1}{(1-qx)^2} \qquad |qx|<1$$

Feladatok

1. Számtani sorozat előállítása: $a_1=a,\ a_n=a_{n-1}+d$
2. Mértani sorozat előállítása: $a_1=a,\ a_n=qa_{n-1}$
3. $a_1=13,\quad a_2=29,\qquad a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}$
4. $a_1=7,\quad a_2=17,\qquad a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}$
5. $a_1=1,\quad a_2=6,\qquad a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}$
6. $a_1=1,\quad a_2=7\qquad a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}+(n+1)$
7. $a_1=1,\quad a_2=13,\qquad a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}$
8. $a_1=1,\quad a_2=4,\qquad a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}$
9. $a_1=1,\quad a_2=2,\qquad a_{n+1}=2a_n-2a_{n-1}$
10. $a_1=7,\quad a_2=17,\qquad a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}+1$
11. $a_1=1,\quad a_2=6,\qquad a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}+1$
12. $a_1=1,\quad a_2=6,\quad a_3=25,\qquad a_{n+1}=6a_n-11a_{n-1}+6a_{n-2}$
13. Az $\{a_n\}$ egészekből álló sorozat a következőképpen definiáljuk:

    $a_1=2,\ a_2=7$ és

    $$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\le\frac{1}{2}$$

    Bizonyítsuk be, hogy a_n minden 1-nél nagyobb pozitív egész n esetén páratlan!

    (Matematika Tanítása, XIII. évfolyam 4. szám, Feladatrovat tanároknak: 283. feladat)