Pell egyenlet

Az $x^2 - Dy^2 = 1$, ahol x, y, D $\in$ **Z** alakú egyenletet Pell egyenletnek nevezik.

> **John Pell** (1611-1685, Anglia)
> Dolgozott Angliában (Cambridge, Horsham, Chichester), valamint Amszterdamban és Bredában. Foglalkozott algebrával és számelmélettel. 1668-ban táblázatot adott ki, amelyben az első 100 000 egész szám szorzattá bontása szerepelt. Sokat publikált, többek között: *Idea of Mathematics* (1638) és *Controversiae de vera circuli mensura* (1647).
> A $y^2 = ax^2 + 1$ alakú egyenletet Euler hibásan nevezte el Pell egyenletnek, mert Pell nem foglalkozott vele.

<u>Bevezető feladat:</u>

Határozzuk meg azokat az egész **k** számokat, melyekre az

$a)\ k^2 + 4k + 4$

$b)\ k^2 + 4k + 3$

$c)\ 2k^2 + 4k + 3$

kifejezések négyzetszámokat vesznek fel.

Megoldás:

a.) Mivel a kifejezésünk teljes négyzet $(k+2)^2$, ezért minden egész **k** esetén négyzetszámot kapunk.

b.) Legyen **m** a keresett egész szám, amire

$$k^2 + 4k + 3 = m^2$$

$$(k+2)^2 - 1 = m^2$$

$$(k+2)^2 - m^2 = 1$$

$$(k+2+m)(k+2-m) = 1$$

Ekkor a lehetséges értékeket táblázatba foglalva kapjuk, hogy

k+2+m	k+2-m	k	m
1	1	-1	0
-1	-1	-3	0

Tehát **k**-ra 2 értéket kaptunk (-3 és -1), amire az adott kifejezés négyzetszámot vesz fel.

c.) Legyen **m** a keresett egész szám, amire

$$2k^2 + 4k + 3 = m^2$$

$$2(k^2 + 2k + 1) + 1 = m^2$$

$$2(k+1)^2 + 1 = m^2$$

$$1 = m^2 - 2(k+1)^2$$

Vezessük be az alábbi ismeretleneket:

$$x = m \qquad \text{és} \qquad y = k + 1$$

ahol **x** és **y** szintén egész számok.

Ekkor a kérdésünk már így hangzik: létezik-e (végtelen sok) egész megoldása a következő egyenletnek:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad ?$$

Legyen

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \textit{és} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

sorozat. Ekkor állítjuk, hogy az így megadott számok szintén megoldások (végtelen sok).

Állításunkat bizonyítsuk teljes indukcióval!

Könnyen belátható, hogy a (3 ; 2) megoldás.

Tegyük fel, hogy van egy megoldáspárunk ($\mathbf{x_n}$ **;** $\mathbf{y_n}$) és nézzük a képzési szabály szerinti következő megoldást:

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (3x_n + 4y_n)^2 - 2(2x_n + 3y_n)^2 =$$
$$= (9x_n^2 - 24x_ny_n + 16y_n^2) - 2(4x_n^2 + 12x_ny_n + 9y_n^2) =$$
$$= 9x_n^2 - 24x_ny_n + 16y_n^2 - 8x_n^2 - 24x_ny_n - 18y_n^2 = x_n^2 - 2y_n^2 = 1$$

azaz a képzési szabály szerint kapott újabb számpár is megoldás.

Ekkor az eredeti feladatba visszahelyettesítve kapjuk:

$$\begin{cases} m_1 = 3 \\ k_1 = 1 \end{cases} \quad \textit{és} \quad \begin{cases} m_{n+1} = 3m_n + 4k_n + 4 \\ k_{n+1} = 2m_n + 3k_n + 2 \end{cases} \quad n \geq 1$$

Azaz tényleg végtelen sok megoldást kaptunk. A szabályt alkalmazva megkapjuk az első három megoldáspárt:

k	m	$2k^2 + 4k + 3$
1	3	$9=3^2$
11	17	$289=17^2$
69	99	$9801=99^2$

Megválaszolatlan kérdések:

- Van-e ezeken kívül más megoldás (megkaptuk az összeset)?
- Honnan jön ez a rekurziós összefüggés?

<u>Az egyenlet általános megoldása</u>
Az egyenletnek (tetszőleges **D** érték esetén) biztosan megoldása az (1 ; 0) és a (-1 ; 0) számpárok (triviális megoldás). Az is nyilvánvaló, hogy ha (x; y) megoldás, akkor az (**x** ; **-y**), (**-x** ; **y**) és (**-x** ; **-y**) is szintén megoldás.
Keressük ezért csak a pozitív, nem triviális egész megoldásokat.

Ha találunk megoldásokat, akkor az **x** és **y** között további összefüggést írhatunk fel:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$
$$x^2 = 1 + Dy^2$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2} + D$$
$$\frac{x}{y} = \sqrt{D + \frac{1}{y^2}} \approx \sqrt{D}$$

feltéve, hogy y "nagy". (Ez azt jelenti, hogy a megoldások hányadosa jó közelítést ad $\sqrt{D}$ -re.)

Vizsgáljuk most meg, hogy **D** mely értéke esetén kapunk (nem triviális) megoldást:
I. eset: D = – m, ahol $m \in N^+$
Ekkor egyenletünk:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$
$$x^2 - \left(-my^2\right) = 1$$
$$x^2 + my^2 = 1$$

Ennek megoldása csak a triviális megoldás, hiszen:

$$1 = x^2 + my^2 \geq x^2 \geq 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 0$$

II. eset: D = m², ahol $m \in N^+$
Ekkor egyenletünk:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$
$$x^2 - m^2y^2 = 1$$
$$(x - my)(x + my) = 1$$

Ennek megoldása csak a triviális megoldás, hiszen:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ x - my = 1 \end{cases} \quad vagy \quad \begin{cases} x + my = -1 \\ x - my = -1 \end{cases}.$$

lehet csak, ami szintén csak a triviális megoldáspárokat adja.

III. eset: D > 0, és nem négyzetszám
Keressük meg ebben az esetben az összes megoldást!

Ha már ismerünk (nem triviális) megoldást, akkor tudunk konstruálni újabbakat a következő állítás felhasználásával.

<u>1. Állítás:</u> Ha $(x_1 ; y_1)$ és $(x_2 ; y_2)$ a Pell egyenlet megoldásai, akkor megoldások az

$$(1)\qquad \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$$
$$(2)\qquad \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$$
$$(3)\qquad \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$$
$$(4)\qquad \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$$

összefüggésekkel meghatározott $(x ; y)$ számok is.

Bizonyítás:
Bizonyítsuk az elsőt, hogy megoldás! Végezzük el az előírt műveleteket:

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{D}\right) = x + y\sqrt{D}$$
$$\left(x_1x_2 + y_1y_2D\right) + \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)\sqrt{D} = x + y\sqrt{D}$$
$$\begin{cases} x = x_1x_2 + y_1y_2D \\ y = x_1y_2 + x_2y_1 \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy ez tényleg megoldás:

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2D &= \left(x_1x_2 + y_1y_2D\right)^2 - \left(x_1y_2 + x_2y_1\right)^2 D = \\
&= \left(x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2D + y_1^2y_2^2D^2\right) - \left(x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2\right)D = \\
&= x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2D + y_1^2y_2^2D^2 - x_1^2y_2^2D - 2x_1x_2y_1y_2D - x_2^2y_1^2D = \\
&= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2D^2 - x_1^2y_2^2D - x_2^2y_1^2D = x_1^2x_2^2 - x_1^2y_2^2D + y_1^2y_2^2D^2 - x_2^2y_1^2D = \\
&= x_1^2\left(x_2^2 - y_2^2D\right) - y_1^2D\left(x_2^2 - y_2^2D\right) = \left(x_1^2 - y_1^2D\right)\left(x_2^2 - y_2^2D\right) = 1\cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

A többi esetre ugyanígy adódik az állítás!

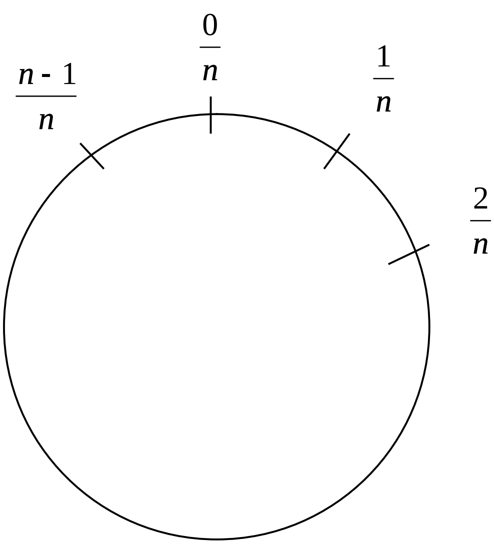
A megoldás létezéséhez szükségünk lesz egy újabb állításra.

<u>2. Állítás:</u> Ha $\alpha > 0$ irracionális szám és $n > 0$ tetszőleges egész szám, akkor léteznek olyan **p** és **q** egész számok $0 < p \le q < n$, melyre

$$\left|p\alpha - q\right| < \frac{1}{n}$$

Bizonyítás:
Tekintsük az $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots (n-1)\alpha$ számokat.
Ábrázoljuk egy – n egyenlő részre felosztott – egységkerületű körön ezeket a számokat.
Igazak a következő állítások:

- Ezek közül egyik sem esik osztópontra α irracionalitása miatt.
- Ha van pont az első és az utolsó intervallumban, akkor kész a bizonyítás (miért?)
- Ha nincs sem az első, sem az utolsó intervallumban egyik ábrázolt szám sem, akkor



van olyan intervallum, amelyben legalább 2 szám található. Ekkor léteznek a $\mathbf{p_1}$ és $\mathbf{p_2}$ számok, melyekre

$$q < |p_1\alpha - p_2\alpha| < q + \frac{1}{n}$$

valamely **q** egészre. Az egyenlőtlenséget rendezve

$$q < |p_1\alpha - p_2\alpha| < q + \frac{1}{n}$$

$$q < |(p_1 - p_2)\alpha| < q + \frac{1}{n}$$

$$|(p_1 - p_2)\alpha - q| < \frac{1}{n}$$

És ezzel a 2. állítást bebizonyítottuk

A következő lépésben bizonyítsuk be, hogy az egyenlet jobb oldalára tudunk olyan egész számot írni, melyre egyenletünknek végtelen sok megoldása lesz.

<u>3. Állítás:</u> Létezik olyan k egész szám, melyre végtelen sok megoldása van a

$$x^2 - y^2 D = k$$

egyenletnek.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbf{n_1} > 1$ tetszőleges egész szám. Ekkor $\sqrt{D}$ -hez léteznek olyan $\mathbf{x_1}$ és $\mathbf{y_1}$ egész számok (2. állítás), melyekre

$$|x_1 - y_1\sqrt{D}| < \frac{1}{n_1}$$

Először becsüljük meg a baloldali kifejezés értékét:

$$|x_1 + y_1\sqrt{D}| = |x_1 - y_1\sqrt{D} + 2y_1\sqrt{D}| < \frac{1}{n_1} + 2y_1\sqrt{D} < \frac{1}{n_1} + 2n_1\sqrt{D}$$

ezt alkalmazva kapjuk

$$|x_1^2 - y_1^2 D| < \frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{n_1} + 2n_1\sqrt{D}\right) = \frac{1}{n_1^2} + 2\sqrt{D} < 1 + 2\sqrt{D}\ .$$

Itt a bal oldalon 0 nem állhat (α irracionalitása miatt), ezért létezik olyan $\mathbf{n_2}$ egész szám ($> n_1$), melyre

$$0 < \frac{1}{n_2} < |x_1^2 - y_1^2 D|$$

Ilyen szám végtelen sok van, válasszunk ezekből egy tetszőlegeset. Az előzőeket gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy léteznek olyan $\mathbf{x_2}$ és $\mathbf{y_2}$ egész számok melyre

$$|x_2 - y_2\sqrt{D}| < \frac{1}{n_2}$$

Ebben az esetbene is igaz, hogy

$$|x_2^2 - y_2^2 D| < 1 + 2\sqrt{D}$$

A gondolatmenetet folytatva kapunk ($\mathbf{x_n}$; $\mathbf{y_n}$) végtelen sok megoldást, melyekre

$$|x_n^2 - y_n^2 D| < 1 + 2\sqrt{D}$$

Mivel az egyenlőtlenség bal oldalán egész szám áll (egyik sem 0!):

$$\left|x_n^2 - y_n^2 D\right| < 1 + 2\sqrt{D}$$

$$-\left(1 + 2\sqrt{D}\right) < x_n^2 - y_n^2 D < 1 + 2\sqrt{D}$$

Így $x^2 - y^2 D$ kifejezés értékére csak annyi értéket kaphatunk, amennyi ebben az intervallumban van. Legyen ezen egészek száma **m**.

Ekkor van **m** skatulyánk, és végtelen sok elemünk. A skatulya-elv következtében biztosan van olyan, amiben végtelen sok elem található, azaz

$$\exists k \in Z \qquad\qquad k \in \left(-1 - 2\sqrt{D}\ ; 1 + 2\sqrt{D}\right)$$

melyre végtelen sok megoldása van a

$x^2 - y^2 D = k$ egyenletnek.

Most bebizonyítjuk, hogy az $x^2 - y^2 D = 1$ egyenletnek is van nem triviális megoldása.

<u>4. Állítás:</u> Van (nem triviális) megoldása az

$x^2 - y^2 D = 1$ **egyenletnek.**

Bizonyítás:

A 3. állítás szerint van olyan k egész szám, melyre

$$x^2 - y^2 D = k$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Közülük van 2 olyan, melyre igaz az, hogy a megoldások x értéke is, és y értéke is ugyanazt a maradékot adja k-val osztva, jelöljük őket (**x₁** ; **y₁**) és (**x₂** ; **y₂**). Ekkor tekintsük a következő 2 számot:

$$a = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 D}{k}, \qquad b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{k}$$

Ezek egész számok és egyik sem 0. Ugyanakkor:

$$a^2 - b^2 D = \left(\frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 D}{k}\right)^2 - \left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{k}\right)^2 D =$$

$$= \frac{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 D + y_1^2 y_2^2 D^2}{k^2} - \frac{x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2}{k^2} D =$$

$$= \frac{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 D + y_1^2 y_2^2 D^2 - x_1^2 y_2^2 D + 2x_1 x_2 y_1 y_2 D - x_2^2 y_1^2 D}{k^2} =$$

$$= \frac{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 D^2 - x_1^2 y_2^2 D - x_2^2 y_1^2 D}{k^2} = \frac{x_1^2 x_2^2 - x_1^2 y_2^2 D + y_1^2 y_2^2 D^2 - x_2^2 y_1^2 D}{k^2} =$$

$$= \frac{x_1^2\left(x_2^2 - y_2^2 D\right) - y_1^2 D\left(x_2^2 - y_2^2 D\right)}{k^2} = \frac{\left(x_1^2 - y_1^2 D\right)\left(x_2^2 - y_2^2 D\right)}{k^2} = 1$$

Azaz

$$a^2 - b^2 D = 1$$

Kaptuk, hogy egyenletünknek van megoldása (4. állítás) és ha ismerünk egy nem triviális megoldást, akkor elő tudunk állítani végtelen sok megoldást (1. állítás). Az 1. állításban használt összefüggést az első (nem triviális) számpárra alkalmazva kapjuk, hogy megoldásaink általános alakja az

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n$$

összefüggés felhasználásával adható meg, ahol ($\mathbf{x_1}$; $\mathbf{y_1}$) a legkisebb megoldás.
Ugyanakkor a megoldás írható a

$$x_n - y_n\sqrt{D} = \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n$$

alakba is.
Ekkor azonban a keresett $\mathbf{x_n}$ és $\mathbf{y_n}$ értékek kifejezhetők az előző két összefüggés felhasználásával:

$$x_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n + \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n}{2}$$

$$y_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n - \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n}{2\sqrt{D}}$$

Még nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogy van-e más megoldása az egyenletnek?

<u>5. Állítás</u>: Nincs más – a 4. állítás után megadottól különböző – megoldása az $x^2 - y^2D = 1$ **egyenletnek.**

Bizonyítás:
Bizonyítsunk indirekt módon. Tegyük fel, hogy találunk másik megoldást, ami nem esik a

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n$$

sorozat elemei közé, ahol $\mathbf{x_1}$ és $\mathbf{y_1}$ a legkisebb nem triviális megoldás (ennek léteznie kell, miért?). Legyen az új, sorozatba nem illő megoldás (a; b). Ekkor létezik olyan "n" egész szám, melyre

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n < a + b\sqrt{D} < \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{n+1}$$

Ekkor az 1. állítást használva szintén megoldás a

$$1 < \left(a + b\sqrt{D}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n < x_1 + y_1\sqrt{D}$$

ami azt jelenti, hogy találtunk egy még kisebb megoldást, mint a $\mathbf{x_1}$ és $\mathbf{y_1}$, ami a feltevésünk szerint a legkisebb. Ez ellentmondás, tehát e kapott összefüggés az összes megoldást megadja.

A továbbiakban tekintsük a $x^2 - y^2D = k$ egyenleteket. Itt **k** tetszőleges egész szám.

<u>6. Állítás:</u> Ha van megoldás, akkor végtelen sok megoldása van az egyenletnek.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy ($\mathbf{x_0}$; $\mathbf{y_0}$) a legkisebb, nem triviális megoldása az $x^2 - y^2D = k$ egyenletnek, és ($\mathbf{x_1}$; $\mathbf{y_1}$) megoldása a neki megfelelő Pell egyenletnek. Ekkor az előzőekben bizonyított módon belátható, hogy az összes megoldás az

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n$$

Térjünk vissza az eredeti felvetett kérdésekhez!
- Van-e még megoldás a találtakon kívül?
Ha lenne, akkor a Pell egyenletnek is találnánk még megoldását, mi nem lehet. Így az összes megoldást megtaláltuk.

- Honnan jön ez a rekurziós összefüggés?

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \textit{és} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

Tudjuk, hogy összes megoldás felírható a következő alakban:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$$

Alkalmazzuk ezt a következő megoldásra is:

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n \left(3 + 2\sqrt{2}\right) = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$3x_n + 4y_n + 2x_n\sqrt{2} + 3y_n\sqrt{2} = \left(3x_n + 4y_n\right) + \left(2x_n + 3y_n\right)\sqrt{2}$$

és ez a megadott rekurziós szabály!

Az első 100 D értékhez tartozó legkisebb, nem triviális megoldások:

D	x	y	D	x	y
1	-	-	51	50	7
2	3	2	52	649	90
3	2	1	53	66249	9100
4	-	-	54	485	66
5	9	4	55	89	12
6	5	2	56	15	2
7	8	3	57	151	20
8	3	1	58	19603	2574
9	-	-	59	530	69
10	19	6	60	31	4
11	10	3	61	1766319049	226153980
12	7	2	62	63	8
13	649	180	63	8	1
14	15	4	64	-	-
15	4	1	65	129	16
16	-	-	66	65	8
17	33	8	67	48842	5967
18	17	4	68	33	4
19	170	39	69	7775	936
20	9	2	70	251	30
21	55	12	71	3480	413
22	197	42	72	17	2
23	24	5	73	2281249	267000
24	5	1	74	3699	430
25	-	-	75	26	3
26	51	10	76	57799	6630
27	26	5	77	351	40
28	127	24	78	53	6
29	9801	1820	79	80	9
30	11	2	80	9	1
31	1520	273	81	-	-
32	17	3	82	163	18
33	23	4	83	82	9
34	35	6	84	55	6
35	6	1	85	285769	30996
36	-	-	86	10405	1122
37	73	12	87	28	3
38	37	6	88	197	21
39	25	4	89	500001	53000
40	19	3	90	19	2
41	2049	320	91	1574	165
42	13	2	92	1151	120
43	3482	531	93	12151	1260
44	199	30	94	2143295	221064
45	161	24	95	39	4
46	24335	3588	96	49	5
47	48	7	97	62809633	6377352
48	7	1	98	99	10
49	-	-	99	10	1
50	99	14	100	-	-

És végül néhány feladat, amelyek megoldásához szükség van a Pell egyenletek elméletének ismeretére!

1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok egész **n**-re ($\mathbf{n} \in \mathbf{N}$) teljesül, hogy az első n egész szám összege négyzetszám!
   (Keressük meg az összes megoldást!)

2. Keressük meg az összes olyan **k** és **m** egész számokat (**k** < **m**), melyre $1+2+\ldots+k=(k+1)+(k+2)+\ldots+m$.
   (Keressük meg az összes megoldást!)

3. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok **n**-re lesz egyidőben **2n+1** és **3n+1** is négyzetszám.

4. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan egymás utáni három egész szám van, amelyek felbonthatók 2 egész szám négyzetösszegére!

5. Keressük meg az összes olyan háromszöget, melynek oldalai egymás utáni egész számok és a területe is egész szám.
   (Keressük meg az összes megoldást!)

6. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok egész megoldása van a $x^2+y^3=z^4$ egyenletnek.

Irodalom:

1. Derek Smith: The Search For An Exhaustive Solution to Pell's Equation, Internet
2. H. W. Lenstra Jr.: Solving the Pell Equation, Notices of the AMS, Volume 49, Number 2, 2002 February
3. Kin Y. Li: Pell's Equation (I), Mathematical Excalibur, Volume 6, Number 3. 2001 June – October
4. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Bhaskara_II.htm
5. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Brahmagupta.html
6. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Narayana.html
7. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Pell.html
8. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pell.html
9. http://mathworld.wolfram.com, Diophantine Equation 2nd Powers
10. http://mathworld.wolfram.com, Pell Equation