Indukcióbuktató? Nem! Megy ez indukcióval is!

A Matematika Tanítása XIX. évfolyam (2011) 3. számában jelent meg Kovács Béla tollából egy cikk, melyben a 20. Nemzetközi Matematika Verseny egyik feladatának a megoldása során jutott arra a következtetésre, hogy a feladat teljes indukció felhasználásával nem oldható meg. A feladat tőle származik és így hangzik:

Igazoljuk, hogy:

$$\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}<\frac{2}{3} \text{ bármely } n \geq 1 \text{ esetén.}$$

Én most szeretnék a feladatra egy teljes indukciós megoldást adni. Az említett cikkben szerepel a szerző eredeti megoldása.

Amikor találkoztam legelőször a feladattal, már akkor furcsa volt nekem. Valahogy hiányérzetem volt, hiányzott valami a baloldalról, mintha egy tag oda még elférne. Ennek a tagnak az alakja – figyelembe véve a többi tagot – $\frac{2}{1+2^1}=\frac{1}{3}$ lenne. Mindkét oldalhoz ezt hozzáadva a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}<1$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{1+2^{2^i}}<1$$

Számítsunk ki tagokat, hogy mennyi is hiányzik az 1-ig!

n=0 $\quad \frac{2^0}{1+2^{2^0}}=\frac{1}{3}=1-\frac{2}{3}$

n=1 $\quad \frac{2^0}{1+2^{2^0}}+\frac{2^1}{1+2^{2^1}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}=1-\frac{4}{15}$

n=2 $\quad \frac{2^0}{1+2^{2^0}}+\frac{2^1}{1+2^{2^1}}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{17}=\frac{247}{255}=1-\frac{8}{255}$

A hiányt vizsgálva és azokat „valamilyen szabályos” alakba írva:

$$\frac{2}{3}=\frac{2^{0+1}}{2^{2^{0+1}}-1}$$

$$\frac{4}{15}=\frac{2^{1+1}}{2^{2^{1+1}}-1}$$

$$\frac{8}{255}=\frac{2^{2+1}}{2^{2^{2+1}}-1}$$

Az a sejtés, hogy

$$\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}=1-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}$$

ami elég a feladat bizonyításához, hiszen

$$\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}=1-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}<1$$

Ezt bizonyítsuk teljes indukcióval!

I. rész, vizsgáljuk meg az első értékeket. Ez megtörtént az előbb.

II. rész, tegyük fel, hogy $n = k$ -ig igaz, hogy

$$\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^k}{1+2^{2^k}}=1-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}$$

III. rész, nézzük $n = k+1$-re a bal oldalt és alakítsuk. Közben használjuk az indukciós feltevést

$$\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^k}{1+2^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+2^{2^{k+1}}}=$$

$$=1-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}+\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}+1}=1+2^{k+1}\left(\frac{1}{2^{2^{k+1}}+1}-\frac{1}{2^{2^{k+1}}-1}\right)=$$

$$=1+2^{k+1}\frac{2^{2^{k+1}}-1-2^{2^{k+1}}-1}{\left(2^{2^{k+1}}+1\right)\left(2^{2^{k+1}}-1\right)}=1+2^{k+1}\frac{-2}{\left(2^{2^{k+1}}+1\right)\left(2^{2^{k+1}}-1\right)}=$$

$$=1-\frac{2^{k+2}}{\left(2^{2^{k+1}}\right)^2-1}=1-\frac{2^{k+2}}{2^{2^{k+2}}-1}$$

És ezzel készen is vagyunk!

A cikkben szerepel a feladat általánosítása is. Az előbb leírt módon az is megoldható teljes indukcióval:

$$\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \ldots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}}<\frac{2}{p^2-1} \qquad p>1$$

helyett a módosított feladat

$$\frac{1}{1+p}+\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \ldots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}}<\frac{2}{p^2-1}+\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-1}$$

és az állítás, ami megy indukcióval:

$$\frac{1}{1+p}+\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \ldots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}}=\frac{1}{p-1}-\frac{2^{n+1}}{p^{2^{n+1}}-1}<\frac{1}{p-1}$$

Szoldatics József
Radnóti Miklós Gimnázium
Dunakeszi